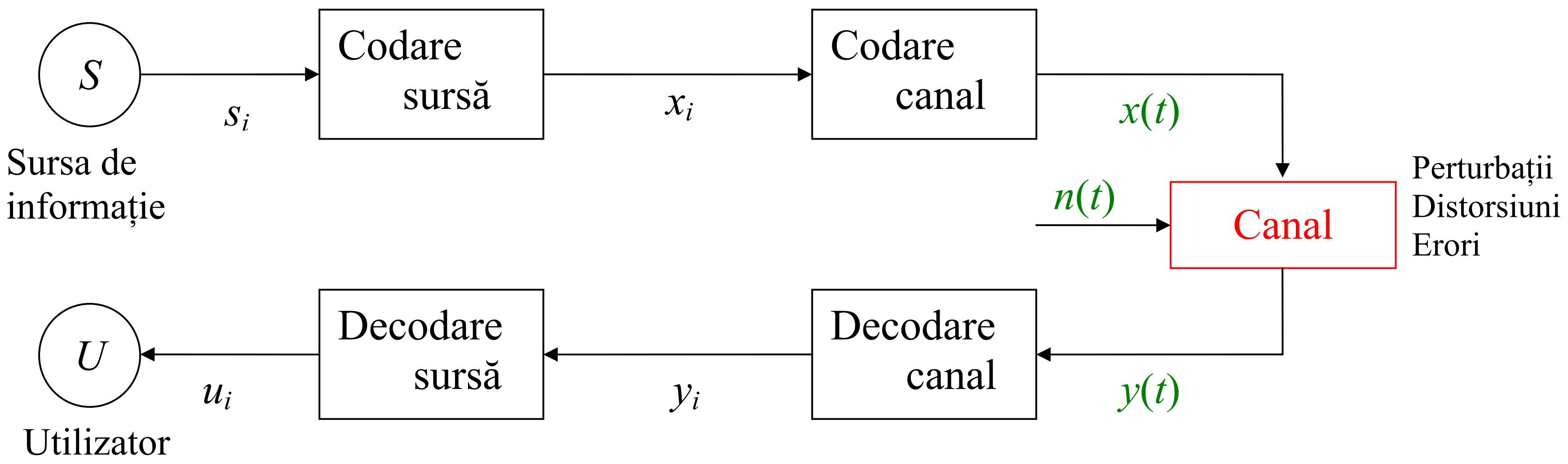
Canale de informaţie

- Canalul de comunicaţie este mediul fizic prin care se propagă semnalele de la sursă la utilizator. În canal sunt incluse şi echipamentele necesare transmisiunii.

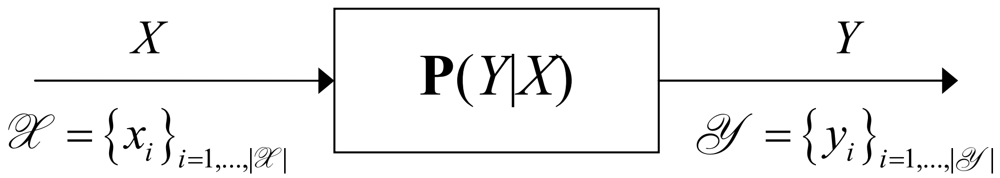
- Rolul canalului este de transmitere eficientă şi sigură a informaţiei.



Canale de informație

- Obiective:
  - modelarea sensibilității canalului la perturbații;
  - observarea influențelor perturbațiilor asupra informației transmise.

- Un canal este definit de alfabetul de intrare $\mathscr{X}$, alfabetul de ieşire $\mathscr{Y}$ precum şi matricea de tranziții $\mathbf{P}(Y|X)$.



Canale de informaţie - clasificare

- După natura spaţiilor de intrare şi de ieşire:
  - *canale discrete*, dacă ambele spaţii sunt discrete;
  - *canale continue*, dacă spaţiile de intrare şi de ieşire sunt continue.

- După gradul de dependenţă al transformărilor din canal funcţie de transformările anterioare:
  - *canale fără memorie*, dacă transformările intrare – ieşire nu depind de transformările anterioare;
  - *canale cu memorie*, dacă transformările intrare – ieşire depind de transformările anterioare.

- După influenţa perturbaţiilor asupra transmisiei:
  - *canale fără erori*;
  - *canale cu erori*.

Canale discrete fără memorie (CDFM) – Matricea de tranziții

- Matricea de tranziții descrie proprietățile canalului cu privire la informația transmisă:

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \{p(\text{receptionat } y_j \mid \text{transmis } x_i)\}_{i=\overline{1,|\mathscr{X}|},\ j=\overline{1,|\mathscr{Y}|}}$$

- Structura matricei de tranziție este:

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} p(y_1 \mid x_1) & p(y_2 \mid x_1) & \cdots & p(y_{|\mathscr{Y}|} \mid x_1) \\ p(y_1 \mid x_2) & p(y_2 \mid x_2) & \cdots & p(y_{|\mathscr{Y}|} \mid x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1 \mid x_{|\mathscr{X}|}) & p(y_2 \mid x_{|\mathscr{X}|}) & \cdots & p(y_{|\mathscr{Y}|} \mid x_{|\mathscr{X}|}) \end{bmatrix}$$

- Probabilitățile $p(y_j|x_i)$ se numesc probabilități directe.

CDFM – Matricea de tranziții

- Fiecărui simbol de intrare îi corespunde un simbol la ieşire.
- Suma elementelor de pe o linie este 1:

$$\sum_{y_j} p(y_j \mid x_i) = 1, \ \forall x_i.$$

- Probabilitatea unui simbol de la ieşirea canalului:

$$p(y_j) = \sum_{x_i} p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i).$$

- Probabilitatea ca simbolul x_i să fi fost transmis, când s-a recepționat simbolul y_j este calculată cu ajutorul formulei lui Bayes:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i)}{\sum p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i)}.$$

CDFM – Matricea de tranziții inversă

- Probabilitățile condiționate p(x_i|y_j) se numesc probabilități inverse și formează matricea de tranziție (sau de zgomot) inversă a canalului:

$$\mathbf{P}(X\,|\,Y)=\begin{bmatrix} p(x_1\,|\,y_1) & p(x_1\,|\,y_2) & \cdots & p(x_1\,|\,y_{|\mathscr{Y}|}) \\ p(x_2\,|\,y_1) & p(x_2\,|\,y_2) & \cdots & p(x_2\,|\,y_{|\mathscr{Y}|}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(x_{|\mathscr{X}|}\,|\,y_1) & p(x_{|\mathscr{X}|}\,|\,y_2) & \cdots & p(x_{|\mathscr{X}|}\,|\,y_{|\mathscr{Y}|}) \end{bmatrix}.$$

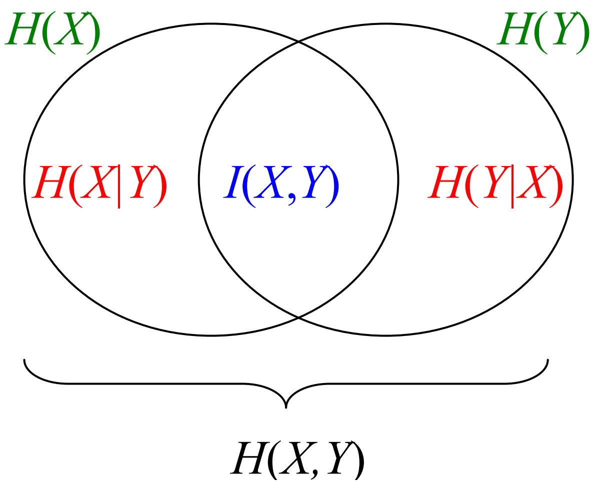
cu proprietatea:

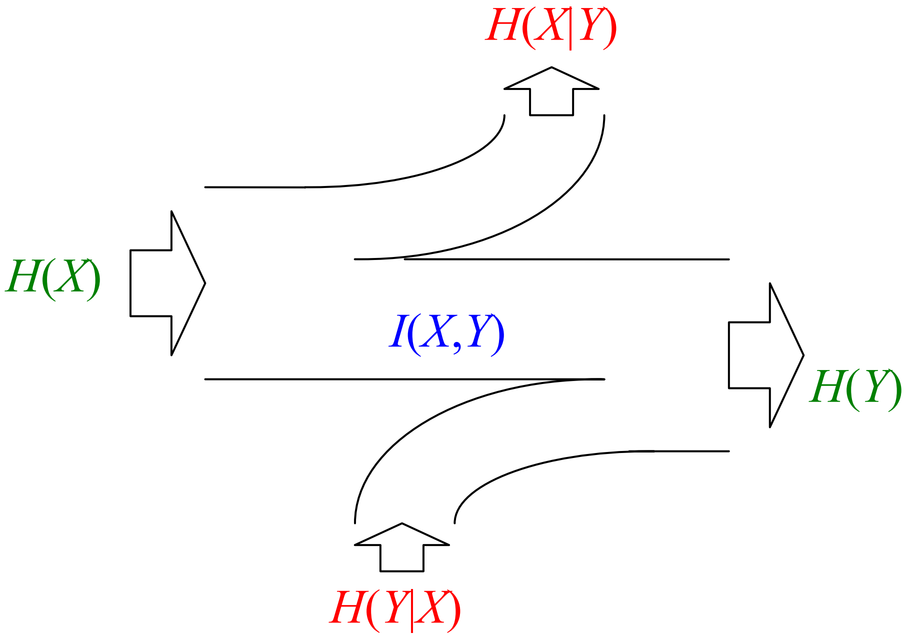
$$\sum_{x_i} p(x_i\,|\,y_j)=1,\ \ \forall y_j.$$

CDFM – Fluxul informațiilor prin canal

- Informația mutuală este:

$$I(X,Y)=H(X)-H(X\,|\,Y)=H(Y)-H(Y\,|\,X)\geq 0.$$





- $H(X|Y)$ - echivocația
  $H(Y|X)$ - eroarea medie

CDFM – Mărimi caracteristice ale canalului

- *Capacitatea* canalului este reprezentată de cantitatea maximă de informație care poate trece prin canal.

- Depinde de proprietățile fizice ale canalului ce sunt determinate de matricea canalului **P**.

- Această valoare este atinsă când canalul este utilizat în mod optim.

- *Capacitatea canalului este maximul informației mutuale, în funcție de distribuția de probabilități a alfabetului de intrare:*

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X,Y).$$

CDFM – Mărimi caracteristice ale canalului

- *Debitul informațional* este cantitatea maximă de informație pe care o poate transmite un canal în unitatea de timp

$$C_t = \frac{C}{\overline{\tau}} (\text{bit}/\text{simbol}\times\text{s}).$$

- *Debitul de informație mutuală*

$$I_t = \frac{I(X,Y)}{\overline{\tau}} (\text{bit}/\text{simbol}\times\text{s}).$$

- *Redundanța absolută* a canalului

$$R = C - I(X,Y) \ \ (\text{bit/simbol})$$

  şi reprezintă rezerva informațională de care dispune un canal ce transmite cantitatea de informație $I(X,Y)$.

CDFM – Mărimi caracteristice ale canalului

- *Redundanța relativă* a canalului este

$$\rho = \frac{R}{C} = 1 - \frac{I(X,Y)}{C}.$$

- *Eficiența* canalului

$$\eta = \frac{I(X,Y)}{C}$$

arată gradul de încărcare a canalului din punct de vedere informațional.

CDFM – canal fără erori

- Fiecare simbol de intrare în canal are un unic simbol la ieşire: nu există incertitudine la sursă despre ceea ce a primit receptorul.

- Un simbol de ieşire poate servi ca țintă doar la un singur simbol de intrare: sursa ştie precis ce a primit receptorul.

- Matricea de tranziții este:

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

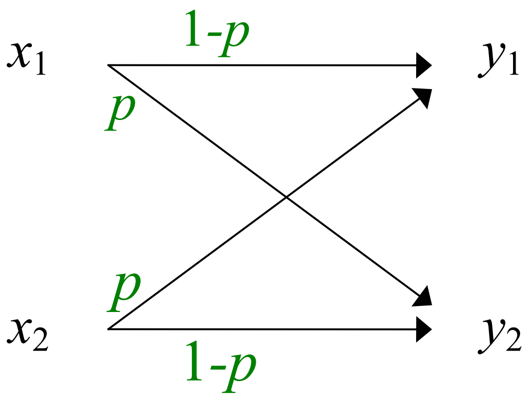
$$\begin{aligned} x_1 &\longrightarrow y_1 \\ x_2 &\longrightarrow y_2 \\ x_3 &\longrightarrow y_3 \\ x_4 &\longrightarrow y_4 \\ x_5 &\longrightarrow y_5 \\ x_6 &\longrightarrow y_6 \end{aligned}$$

CDFM – canal fără erori

- Proprietăți:
  - $H(Y,X) = H(X,Y) = 0$;
  - toată informația de la sursă este transmisă $\Leftrightarrow I(X,Y) = H(X)$;
  - transmisia are eficacitate maximă $\Leftrightarrow H(X) = H(Y)$;
  - matricea canalului este o matrice diagonală;
  - numărul simbolurilor de la intrarea în canal este egal cu numărul simbolurilor de la ieşirea canalului;
  - capacitatea canalului este $C = \max\limits_{P(X)} H(X) = \log |\mathscr{X}|$.

CDFM – canal binar simetric (CBS)

- Canalul binar simetric, caracterizat de probabilitatea de eroare *p*, este:



$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

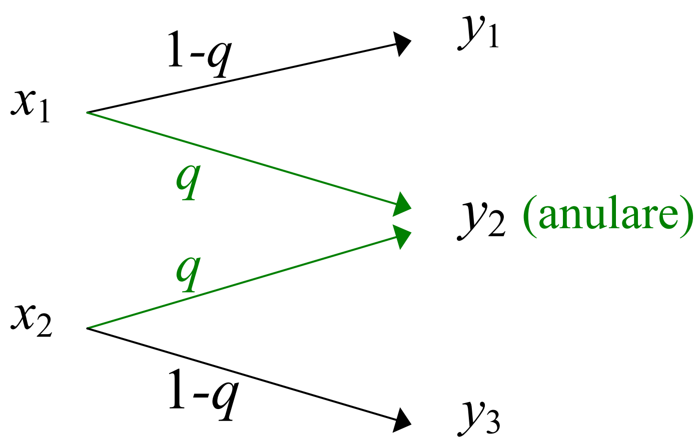
- Capacitatea canalului este dată de relația:

$$C = 1 + p\log p + (1-p)\log(1-p) = 1 - h(p) \ \text{(bit/simbol)},$$

expresie obținută pentru simboluri echiprobabile $p(x_1) = p(x_2) = 0.5$.

CDFM – canal binar cu anulări (CBA)

- Canalul binar cu anulări este caracterizat de dimensiunea alfabetelor de intrare $|\mathscr{X}| = 2$, de ieşire $|\mathscr{Y}| = 3$, precum şi de probabilitatea de anulare a fiecărui simbol q.



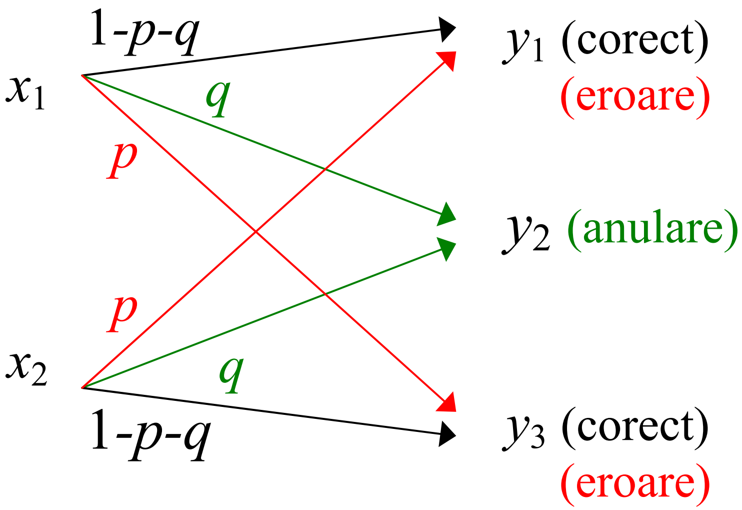
- Matricea de zgomot este

$$\mathbf{P}(Y \mid X) = \begin{bmatrix} 1-q & 0 & q \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}.$$

- Capacitatea canalului este $C = 1 - q$.

CDFM – canal binar cu erori şi anulări (CBEA)

- În plus faţă de CBA, canalul binar cu erori şi anulări mai are ca parametru probabilitatea de eronare a unui simbol p.



- Matricea de zgomot este

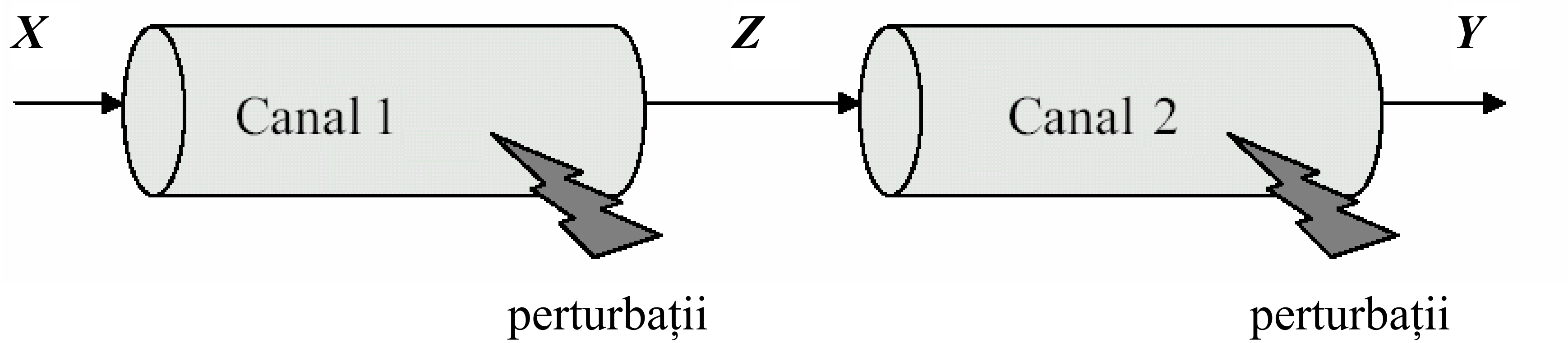
$$\mathbf{P}(Y\,|\,X) = \begin{bmatrix} 1-p-q & p & q \\ p & 1-p-q & q \end{bmatrix}.$$

- Capacitatea canalului pentru $p(x_1) = p(x_2) = 0.5$ este:

$$C = 1 - q + p\log p - (1-q)\log(1-q) + (1-p-q)\log(1-p-q) \quad \text{(bit/simbol)}.$$

CDFM – Înserierea canalelor

- În cazul a două canale modelul este:

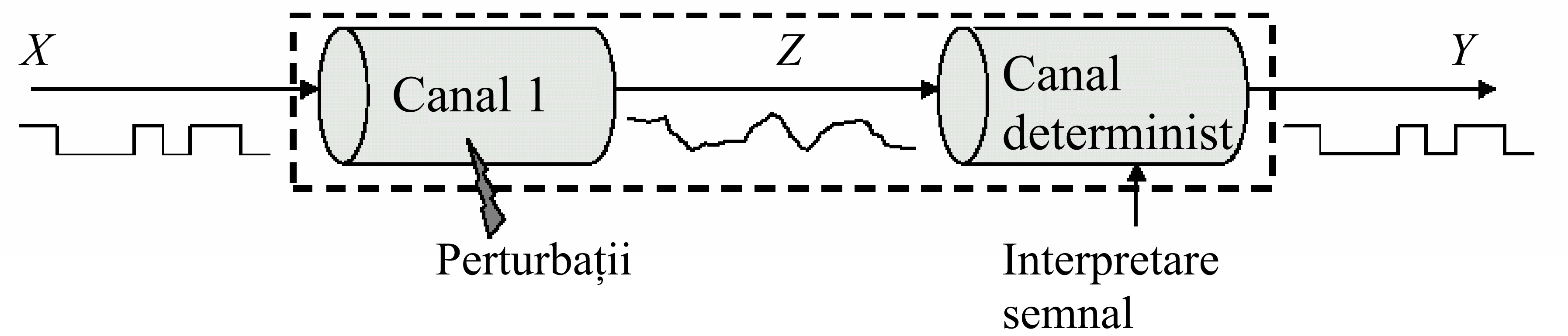


- Drumul informației:

$$H(X\,|\,Y) \geq H(X\,|\,Z) \Rightarrow I(X,Y) \leq I(X,Z).$$

CDFM – Canale reduse

- Modelul unui canal redus:



- Canalul determinist simplifică ieşirea canalului 1, reducând dimensiunea setului de simboluri de ieşire ale canalului 1, prin adăugarea de coloane suplimentare la matricea **P.**
- Posibilele erori de interpretare duc la scurgerea de informații:

$$H(X|Y) \geq H(X|Z) \Rightarrow I(X,Z) \geq I(X,Y).$$

CDFM – Reguli de decizie

- O regulă de decizie $\hat{x}_i = d(y_j)$ este orice funcție care atribuie, în mod unic, unui simbol de intrare un simbol de ieşire.

- Dacă $|\mathscr{X}|$ şi $|\mathscr{Y}|$ sunt dimensiunile alfabetelor $\mathscr{X}$ şi $\mathscr{Y}$, atunci numărul maxim de funcții este $|\mathscr{X}|^{|\mathscr{Y}|}$.

- Alegerea regulii de decizie în concordanță cu utilizarea eficace a canalului se face minimizând probabilitatea de eroare a canalului.

- Probabilitatea unei erori în transmiterea unui simbol este:

$$p_{err} = \sum p(\text{eroare}|y_j) \cdot p(y_j), \text{ unde } p(\text{eroare} \mid y_j) = 1 - p\left(d(y_j) \mid y_j\right).$$

CDFM – Reguli de decizie (cazul binar)

- Partiția simbolurilor recepționate se face comparând mărimile:
  - raportul de plauzibilitate $\lambda_k = \dfrac{p(y_k \mid x_1)}{p(y_k \mid x_2)}$;
  - pragul testului $K = \dfrac{p(x_2)}{p(x_1)} \cdot \dfrac{C_{21} - C_{22}}{C_{12} - C_{11}}$,

    unde: C_{11} şi C_{22} – costurile unor decizii corecte,

    C_{12} şi C_{21} – costurile unor decizii eronate.

- Pentru cazul binar, spațiul de recepție se împarte în două jumătăți egale, corespunzătoare cazurilor:
  - ipoteza H_1 – s-a recepționat y_1 şi s-a estimat $\hat{x}_1$;
  - ipoteza H_2 – s-a recepționat y_2 şi s-a estimat $\hat{x}_2$.

CDFM – Reguli de decizie (cazul binar)

- Regula probabilității aposteriori maxime (MAP)

$$\frac{p(x_1 \mid y_k)}{p(x_2 \mid y_k)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1;$$

- Regula riscului minim (Bayes)

$$\lambda_k \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} K \Leftrightarrow \frac{p(y_k \mid x_1)}{p(y_k \mid x_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(x_2)}{p(x_1)} \cdot \frac{C_{21} - C_{22}}{C_{12} - C_{11}};$$

CDFM – Reguli de decizie (cazul binar)

- Regula observatorului ideal

$$\lambda_k \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} K;\ \text{pentru}\ \begin{cases} C_{12} = C_{21} \\ C_{11} = C_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_k \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(x_2)}{p(x_1)};$$

- Regula plauzibilității minime (ML)

$$\lambda_k \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} K;\ \text{pentru}\ \begin{cases} C_{12} = C_{21} \\ C_{11} = C_{22} = 0 \\ p(x_1) = p(x_2) \end{cases} \Rightarrow \lambda_k \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1.$$